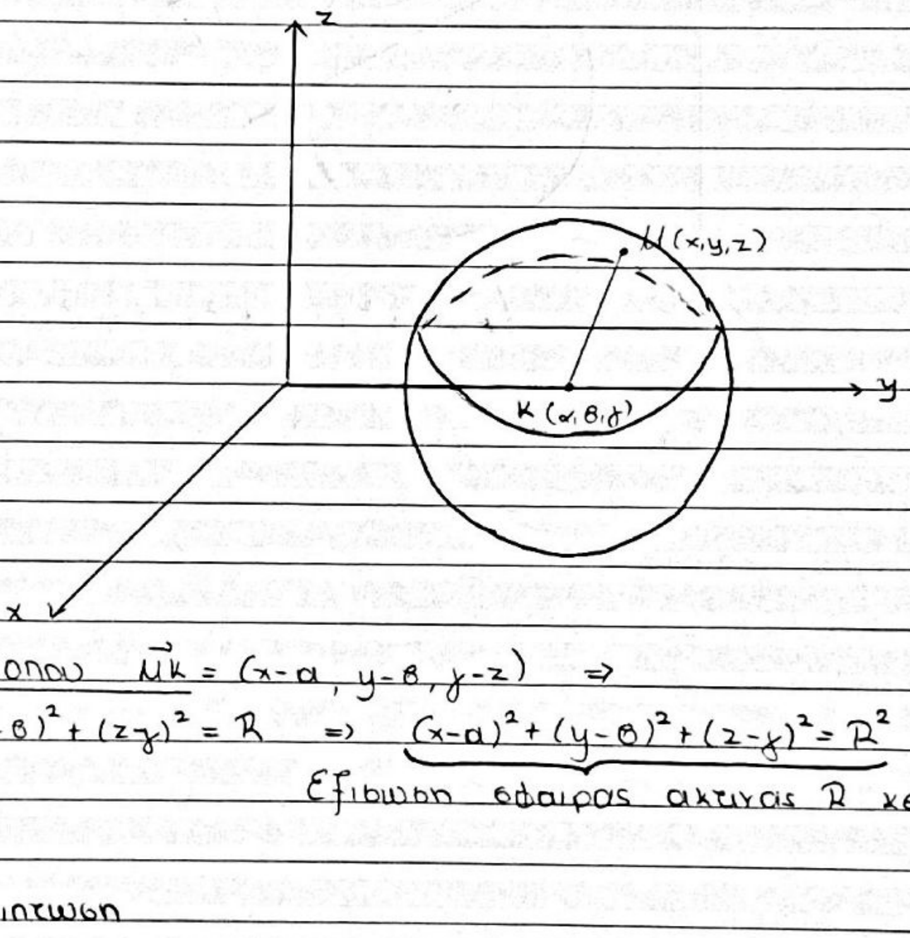
Μαθημα 23ο 27/5/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Σφαιρα

Ειναι ο γεωμετρικος τοπος των σημειων που απεχουν σταθερη αποσταση R απο σταθερο σημειο K

ακτινα σφαιρας κεντρο σφαιρας



$|\vec{MK}| = R$ οπου $\vec{MK} = (x-\alpha, y-\beta, \gamma - z) \Rightarrow$

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2} = R \Rightarrow \underbrace{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2}_{\text{Εξισωση σφαιρας ακτινας } R \text{ κεντρου } K(\alpha,\beta,\gamma)}$$

- Ειδικη περιπτωση

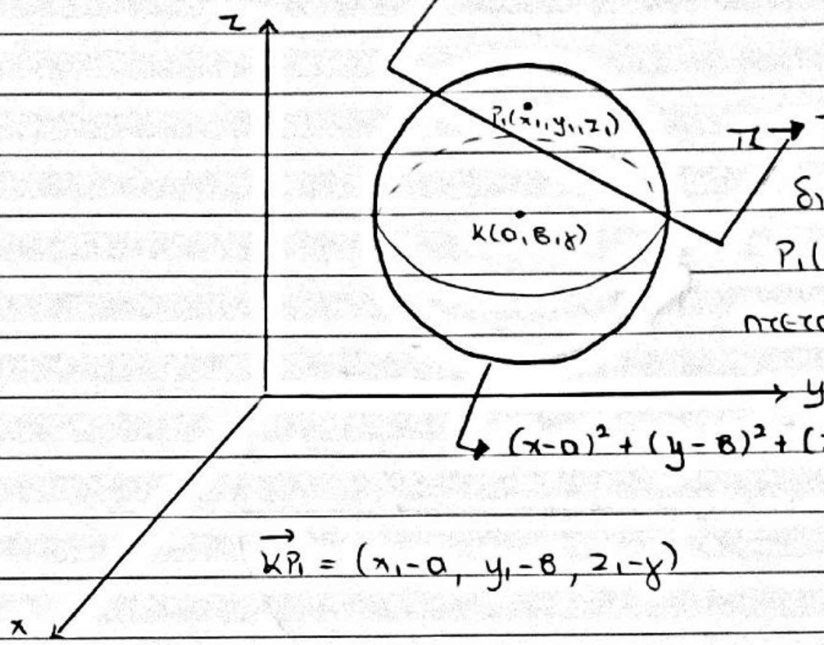
$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0$$

με $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{\Gamma}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}}{4}$

© NEXT Co. GREECE

⊕ Για τον προσδιορισμο της σφαιρας χρειαζονται 4 μη συνεπιπεδα σημεια τομης

Εφαπτομενη επιπεδο σφαιρας



π → Το επιπεδο που διερχεται απο το $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και εφαπτεται της σφαιρας στο P_1

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

$$\vec{KP_1} = (x_1-\alpha,\ y_1-\beta,\ z_1-\gamma)$$

Προσδιορισμος επιπεδου

- Ειναι να ξερουμε σημειου αυτου (π.χ το $P_1(x_1, y_1, z_1)$) και
- Ενα διανυσμα $\vec{n}(n_1, n_2, n_3) \perp (\pi)$

$$\Downarrow$$

$$(x-x_1)n_1 + (y-y_1)n_2 + (z-z_1)n_3 = 0$$

Παρατηρηση

Η ακτινα της σφαιρας που τεμνει τη σφαιρα σε σημειο $P_1(x_1, y_1, z_1)$ αυτης, ειναι καθετο στο εφαπτομενο επιπεδο (π) της σφαιρας

⊕ Για το (π) ξερουμε οτι

α) $P_1(x_1, y_1, z_1) \in (\pi)$

β) $\vec{KP_1} = (x_1-\alpha,\ y_1-\beta,\ z_1-\gamma) \perp (\pi)$

Από (π) $(x-x_1)(x_1-\alpha)+(y-y_1)(y_1-\beta)+(z-z_1)(z_1-\gamma)=0 \Rightarrow$

$\pm\alpha \qquad \pm\beta \qquad \pm\gamma$

$$((x-\alpha)-(x_1-\alpha))(x_1-\alpha)+((y-\beta)-(y_1-\beta))(y_1-\beta)+((z-\gamma)-(z_1-\gamma))(z_1-\gamma)=0$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)+(z-\gamma)(z_1-\gamma)-((x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2+(z_1-\gamma)^2)=0$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)+(z-\gamma)(z_1-\gamma)=R^2$$

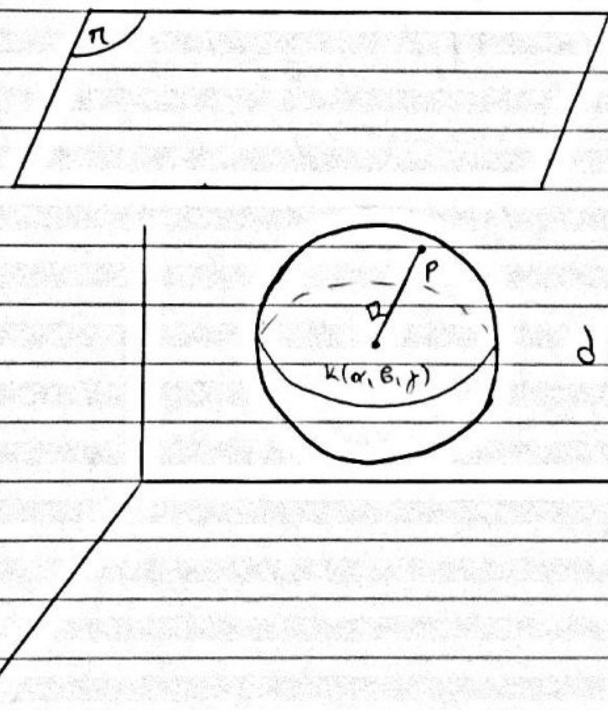
- Εξίσωση εφαπτομένης επιπέδου σφαίρας σε $P_1(x_1,y_1,z_1)\in\Sigma$

$K(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$: $xx_1+yy_1+zz_1=R^2$

Σχετική θέση σφαίρας / επιπέδου

Έστω (Σ): $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$

(π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$



$$d(K(\alpha,\beta,\gamma),\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

© NEXT Co. GREECE

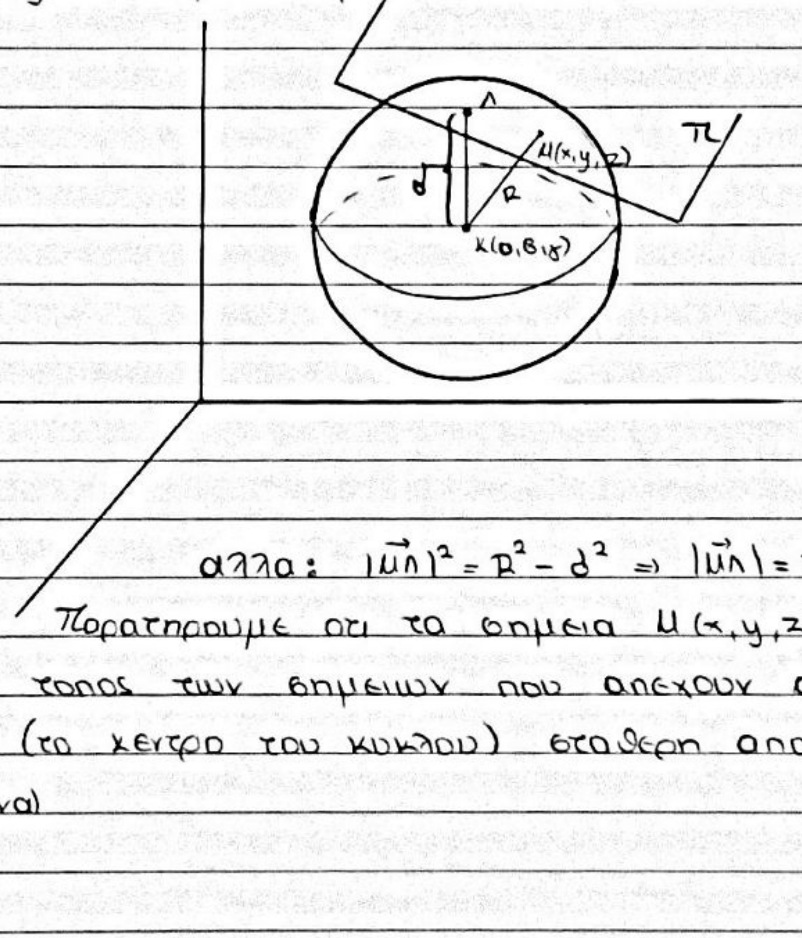
Αρκει να προσδιορισαμε την αποσταση του $K(\alpha,\beta,\gamma)$ απο το (π) (Εστω d)

- $d > R \Rightarrow$ το (π) δεν τεμνει τη σφαιρα
- $d = R \Rightarrow$ το (π) ειναι το εφαπτομενο επιπεδο της (Σ) στο P (οπου το P ειναι η προβολη του K στο (π))
- $d < R \Rightarrow$ το (π) τεμνει τη σφαιρα (η τομη ειναι κυκλος)

$d < R$ Αρα σφαιρα-επιπεδο τεμνονται

Εστω Λ η προβολη του K στο (π)

Εστω $M(x,y,z)$ σημειο τομης σφαιρας / επιπεδου



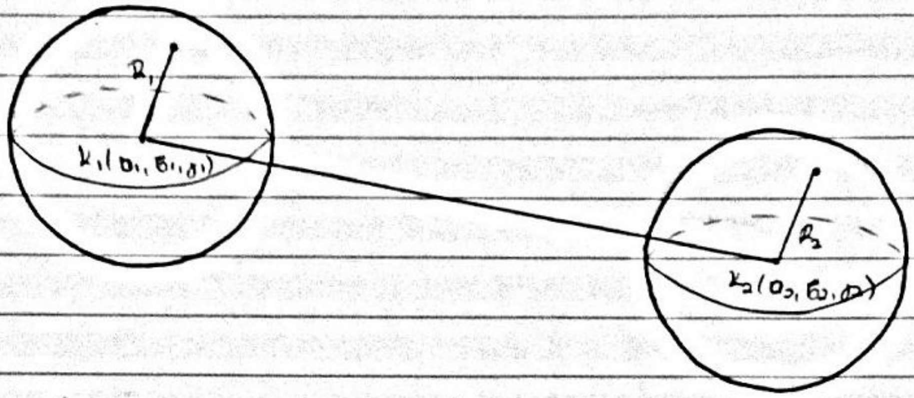
αλλα: $|\vec{M\Lambda}|^2 = R^2 - d^2 \Rightarrow |\vec{M\Lambda}| = \sqrt{R^2 - d^2}$

Παρατηρουμε οτι τα σημεια $M(x,y,z)$ ειναι ο γεωμετρικος τοπος των σημειων που απεχουν απο σταθερο σημειο Λ (το κεντρο του κυκλου) σταθερη αποσταση $\sqrt{R^2-d^2}$ (ακτινα)

Σχετικες θεσεις σφαιρων

(Σ$_1$) $(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2+(z-\gamma_1)^2=R_1^2$

(Σ$_2$) $(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2+(z-\gamma_2)^2=R_2^2$



$\overrightarrow{K_1K_2}=(\alpha_2-\alpha_1,\ \beta_2-\beta_1,\ \gamma_2-\gamma_1) \Rightarrow$

$d=|\overrightarrow{K_1K_2}|=\sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2+(\gamma_2-\gamma_1)^2}$

- $d>R_1+R_2 \Rightarrow$ οι σφαιρες δεν τεμνονται
- $d=R_1+R_2 \Rightarrow$ οι σφαιρες εφαπτονται
  (ή $d=|R_1-R_2|$)
- $d<R_1+R_2 \Rightarrow$ οι σφαιρες τεμνονται

Ασκηση

(A) Να βρεθει ο γεωμετρικος τοπος των σημειων τομης των σφαιρων

(Σ$_1$) $x^2+y^2+z^2-4x-4y-8z+2=0$

(Σ$_2$) $x^2+y^2+z^2-x+2y-7z-3=0$

(Σ$_1$) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=(\sqrt{22})^2$

(Σ$_2$) $(x-1/2)^2+(y+1)^2+(z-7/2)^2=(\sqrt{66/4})^2$

$K_1(2,-2,4)$ $R_1=\sqrt{22}$ και $K_2(1/2,-1,7/2)$ $R_2=\sqrt{66/4}$

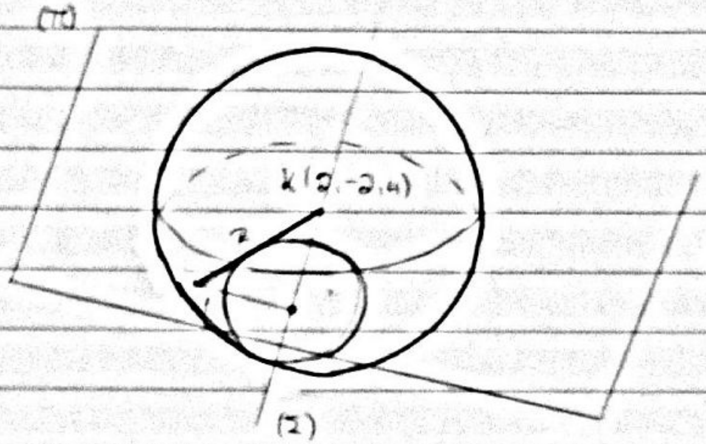
© NEXT Co. GREECE

$$|\vec{K_1K_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{13}/4$$

Αρχικά εξετάζουμε για την τομή

$\rho_1+\rho_2 > \sqrt{13}/4 \Rightarrow$ οι σφαίρες τέμνονται (τομή κύκλος)

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4x+4y-8z+2=0 \\ 3x-2y+z-5=0 \quad (1) \end{cases}$$



$(x_1,y_1,z_1)=K(2,-2,4)$

Το κέντρο M είναι σημείο του επιπέδου (π) και είναι στην τομή του (π) και της ευθείας (ε), όπου (ε) είναι η κάθετη που διέρχεται από το K και είναι κάθετη στο (π)

αν $\Pi(x_1,y_1,z_1) \in (\varepsilon)$ και $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma) \parallel (\varepsilon) \Rightarrow \frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma}$

$\Rightarrow \vec{n}=(3,-2,1) \perp (\pi)$

$\Rightarrow \vec{n}=(3,-2,1) \parallel (\varepsilon)$

$$\Rightarrow (\varepsilon)\quad \underbrace{\frac{x-2}{3} = \overbrace{\frac{y+2}{-2}}}_{(2)} \overbrace{= \frac{z-4}{1}}^{(3)}$$

Λύνοντας (1),(2),(3) $\Rightarrow$ προκύπτει $M(x,y,z)$

Βλεπουμε οτι $|\vec{EM}|^2 = |\vec{KE}|^2 - |\vec{KM}|^2 \Rightarrow$

$|\vec{EM}| = \sqrt{|\vec{KE}|^2 - |\vec{KM}|^2} = D_1^2$ - αποσταση σημειου $(\overset{x_0}{2}, \overset{y_0}{-2}, \overset{z_0}{4})$

απο (Π): $\underset{A}{3x} - \underset{B}{2y} + \underset{\Gamma}{z} - \underset{\Delta}{5} = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

Ελλειψοειδες

Η επιφανεια της οποιας η εξισωση εχει τη μορφη:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ λεγεται ελλειψοειδες.

Παρατηρηση $ax^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0 \Rightarrow$

$$\frac{ax^2}{-\delta} + \frac{\beta y^2}{-\delta} + \frac{\gamma z^2}{-\delta} + \frac{\delta}{-\delta} = 0 \Rightarrow$$

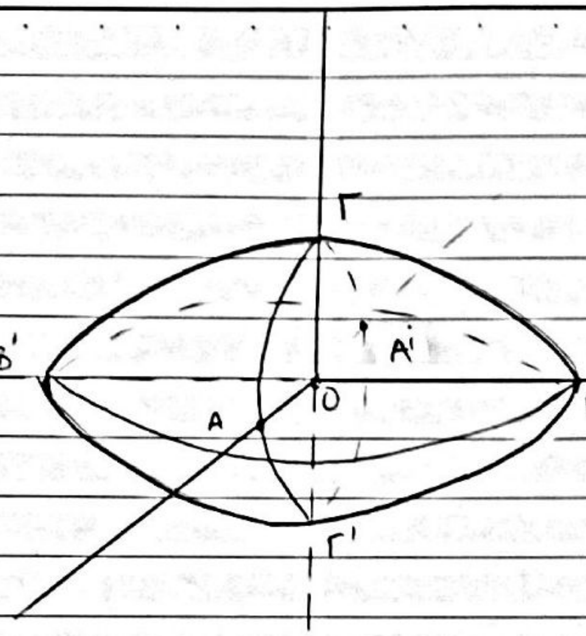
$$\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(\beta')^2} + \frac{z^2}{(\gamma')^2} = 1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} + \frac{(z-z_0)^2}{\gamma^2} = 1$$

→ Κεντρο $K(x_0, y_0, z_0)$

© NEXT Co. GREECE

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad (1)$$



$A(\alpha,0,0)$ | $A'(-\alpha,0,0)$

$B(0,\beta,0)$ | $B'(0,-\beta,0)$

$\Gamma(0,0,\gamma)$ | $\Gamma'(0,0,-\gamma)$

⊛ Καθε επιπεδο παραλληλο σε εναν απο τους αξονες το οποιο τεμνει το ελλειψοειδες το τεμνει κατα μια ελλειψη

$z=k \quad , k\in\mathbb{R}$

Τοτε πρεπει $-\gamma<k<\gamma \Leftrightarrow |k|<\gamma \Rightarrow \frac{z^2}{\gamma^2}=\frac{k^2}{\gamma^2}<1$

$(1) \Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1-\frac{k^2}{\gamma^2} \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{\alpha^2\left(1-\frac{k^2}{\gamma^2}\right)}+\frac{y^2}{\beta^2\left(1-\frac{k^2}{\gamma^2}\right)}=1 \Rightarrow$$

$$\left.\underbrace{\frac{x^2}{\left(\alpha\sqrt{1-\frac{k^2}{\gamma^2}}\right)^2}}_{\alpha'}+\underbrace{\frac{y^2}{\left(\beta\sqrt{1-\frac{k^2}{\gamma^2}}\right)^2}}_{\beta'}=1\right\} \text{ελλειψη}$$

• αν $\alpha = \beta$ $\Rightarrow$ έχουμε ελλειψοειδές εκ περιστροφής
Δημιουργείται από την περιστροφή της έλλειψης
$\left\{ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 , y = 0 \right\}$ γύρω από τον άξονα Oz

• αν $\alpha = \beta = \gamma$ $\Rightarrow$ έχουμε σφαίρα $(x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2)$

© NEXT Co, GREECE